

6 класс в Математической вертикали

Задача 1. Аня называет дату красивой, если все 6 цифр её записи различны. Например, 19.04.23 красивая дата, а 19.02.23 и 01.06.23 нет.

а) Сколько красивых дат будет в апреле 2023 года?

[2 балла]

б) Сколько всего красивых дат в 2023 году? [2 балла]

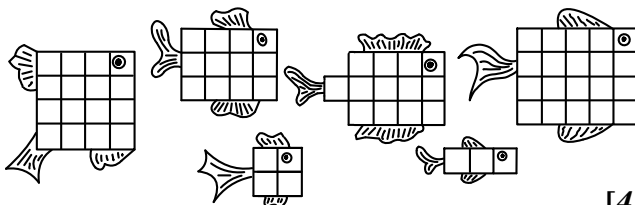
(М. Евдокимов)

Ответ. а) 5; б) 30.

Решение. а) Заметим, что в апреле дата записывается **.04.23. Поэтому в качестве первых двух цифр можно использовать только 1, 5, 6, 7, 8, 9. Первой из этих цифр может быть только 1, поэтому всего получается пять дат: 15, 16, 17, 18, 19 апреля.

б) См. решение задачи 1 для 7 класса (с. 9).

Задача 2. Кот за полминуты съел половинку самой маленькой рыбки, а всего он съел 5 рыбок и потратил на это целое число минут (кот ест рыбу с постоянной в «клеточках» скоростью). На рисунке изображены все рыбки, которые были у кота. Какую рыбку кот не стал есть?



[4 балла]

(Т. Казичына)

Ответ. Самую правую.

Решение. Раз за полминуты кот съел полрыбки, то за минуту он съест эту рыбку целиком. В маленькой рыбке 3 клетки, значит, за каждую минуту кот съедает по 3 клетки. За целое число минут будет съедено кратное трём число клеток. Суммарно во всех рыбках $3 + 4 + 16 + 12 + 13 + 20 = 68$ клеток. Это число при делении на 3 даёт остаток 2. Значит, после целого числа минут останется рыбка,

количество клеток в которой при делении на 3 даёт остаток 2. Такая рыбка всего одна — это рыбка с туловищем 4×5 клеток. Она и не будет съедена.

Задача 3. Вася в течение 15 дней решал задачи — каждый день хотя бы одну. Каждый день (кроме первого), если погода была пасмурная, то он решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а если солнечная — на одну задачу меньше. За первые 9 дней Вася решил 13 задач.

а) Какая погода была на 10-й день? Сколько задач он решил в этот день? [4 балла]

б) Какое наибольшее число задач мог решить Вася в 15-й день? [2 балла] (Б. Френкин)

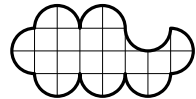
Ответ. а) 10-й день был пасмурным, Вася решил 2 задачи; б) 7 задач.

Решение. а) См. решение задачи 2 для 6 класса (с. 4).

б) Так как в 10-й день Вася решил 2 задачи (см. п. а), а в каждый следующий день можно решить максимум на 1 задачу больше, то через 5 дней можно решить максимум $2 + 5 = 7$ задач. Так получится, если с 11-го по 15-й день была пасмурная погода.

Задача 4. См. задачу 3 для 6 класса (с. 4). [7 баллов]

Задача 5. а) От маленького «печенья» откусили кусочек. Разрежьте остаток, изображенный на рисунке, на 3 равные части (т. е. одинаковые по размеру и по форме). Разрезы не обязательно прямолинейные.



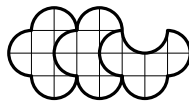
[2 балла]

(Т. Корчемкина)

б) См. задачу 4 для 6 класса (с. 5).

[5 баллов]

Решение. а)



Задача 6. У царя есть 5 мешков с золотыми монетами, в каждом по 100 монет. Царь помнит, что в одном мешке все монеты весят 10 г, во втором 11 г, в третьем 12 г,

в четвёртом 13 г, в пятом 14 г, но не помнит, где какие. Царь сообщил это придворному мудрецу и указал на один из мешков. Мудрец может вынимать из этого и из других мешков любое количество монет, но на вид они все одинаковы. Однако у мудреца есть большие двухчашечные весы без гирь (они точно покажут, равны ли веса на чашках, а если нет, то какая чашка тяжелее).

а) Может ли мудрец за одно взвешивание проверить, верно ли, что в указанном мешке хранятся монеты по 10 г?

[4 балла]

б) Может ли мудрец определить, какие монеты в указанном мешке, сделав не более двух взвешиваний?

[6 баллов] (М. Евдокимов)

Ответ. а, б) Да, может.

Решение. а) Возьмём по одной монете из каждого из мешков, кроме указанного, поместим их на левую чашку, а на правую положим 5 монет из указанного мешка. Если в указанном мешке действительно лежат монеты по 10 г, то весы покажут равновесие:

$$11 + 12 + 13 + 14 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10.$$

Если же в указанном мешке монеты тяжелее 10 г, то правая чашка окажется тяжелее 50 г. На левой же чашке суммарный вес четырёх монет будет меньше 50 г, равенства не будет (весы покажут, что правая чашка тяжелее).

б) Аналогично пункту а) за одно взвешивание можно проверить, не лежат ли в указанном мешке монеты по 12 г. Для этого достаточно взять по одной монете из всех мешков, кроме указанного, и сравнить полученный вес с весом четырёх монет из указанного мешка. Тогда возможны случаи:

$$10 + 11 + 12 + 13 < 14 + 14 + 14 + 14 \text{ (правая чашка перевесила);}$$

$$10 + 11 + 12 + 14 < 13 + 13 + 13 + 13 \text{ (правая чашка перевесила);}$$

$$10 + 11 + 13 + 14 = 12 + 12 + 12 + 12 \text{ (веса равны);}$$

$$10 + 12 + 13 + 14 > 11 + 11 + 11 + 11 \text{ (левая чашка перевесила);}$$

$$11 + 12 + 13 + 14 > 10 + 10 + 10 + 10 \text{ (левая чашка перевесила).}$$

Если весы показали равенство, то мы уже поняли, какие монеты в указанном мешке.

Если левая чашка перевесила (т. е. в нашем мешке монеты по 10 г или по 11 г), то вторым взвешиванием можно проверить, лежат ли в указанном мешке монеты по 10 г (см. п. а).

Если же перевесила правая чашка, то в нашем мешке монеты либо по 13 г, либо по 14 г.

Тогда на левую чашку можно положить по 2 монеты из каждого мешка, кроме указанного, а на правую чашку 7 монет из указанного мешка. При этом $2 \cdot (10 + 11 + 12 + 13) = 92$ г легче, чем $14 \cdot 7 = 98$ г, а $2 \cdot (10 + 11 + 12 + 14) = 94$ г тяжелее, чем $7 \cdot 13 = 91$ г, поэтому если левая чашка окажется легче, то в нашем мешке монеты по 14 г, а если тяжелее — монеты по 13 г.

Комментарий. Возможен другой способ решения, аналогичный решению задачи 6 для 7 класса (с. 14).